算法导论习题选集

练习 3-2

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：https://algorithm.cuijiacai.com

Problem 1

1. 使用代入法证明 $T(n) = 4T(n/3) + n$ 的解为 $T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$ 。（提示：需要在假设中减去一个低阶项以完成归纳）

2. 利用换元法求解递归式 $T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log n$ 。你的解应该是渐近紧确的，不必担心数值是否是整数。

Problem 2

1. 对递归式 $T(n) = T(n-1) + T(n/2) + n$，利用递归树确定一个好的渐近上界，用代入法进行验证。

2. 对递归式 $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + cn$，利用递归树给出一个渐近紧确界，其中 $0 < \alpha < 1$ 和 $c > 0$ 是常数。

Problem 3

对下列递归式，使用主方法求出渐近紧确界。

1. $T(n) = 2T(n/4) + 1$
2. $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$
3. $T(n) = 2T(n/4) + n$
4. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

Problem 4

熊教授想设计一个渐近快于 Strassen 算法的矩阵相乘算法。他的算法使用分治方法，将每个矩阵分解为 $n/4 \times n/4$ 的子矩阵，分解和合并步骤共花费 $\Theta(n^2)$ 时间。他需要确定，他的算法需要创建多少个子问题，才能击败 Strassen 算法。如果他的算法创建 a 个子问题，则描述运行时间 $T(n)$ 的递归式为 $T(n) = aT(n/4) + \Theta(n^2)$ 。熊教授的算法如果要渐近快于 Strassen 算法，a 的最大整数值应是多少?

Problem 5

考虑主定理情况 3 的一部分：对某个常数 $c < 1$，正则条件 $af(n/b) \le cf(n)$ 是否成立。给出一个例子，其中常数 $a \ge 1, b > 1$ 且函数 $f(n)$ 满足主定理情况 3 中除正则条件外的所有条件。

Problem 6

证明：如果 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ ，其中 $k \geq 0$ ，那么主递归式的解为

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$$

为简单起见，假定 n 是 b 的幂。

Problem 7

证明：主定理中的情况 3 被过分强调了，从某种意义上来说，对于某个常数 $c < 1$ ，正则条件 $af(n/b) \leq cf(n)$ 成立本身就意味着存在常数 $\varepsilon > 0$ ，使得 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ 。