

# 算法导论习题选集

## 练习 4-1

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：<https://algorithm.cuijiacai.com>

## Problem 1

请描述  $RANDOM(a, b)$  过程的一种实现, 它只调用  $RANDOM(0, 1)$ 。作为  $a$  和  $b$  的函数, 你的过程的期望运行时间是多少?

## Problem 2

假设你希望以  $1/2$  的概率输出 0 与 1。你可以自由使用一个输出 0 或 1 的过程 `BIASED-RANDOM`。它以某概率  $p$  输出 1，概率  $1 - p$  输出 0，其中  $0 < p < 1$ ，但是  $p$  的值未知。

请给出一个利用 `BIASED-RANDOM` 作为子程序的算法，返回一个无偏的结果，能以概率  $1/2$  返回 0，以概率  $1/2$  返回 1。作为  $p$  的函数，你的算法的期望运行时间是多少？

### Problem 3

在 HIRE-ASSISTANT 中, 假设应聘者以随机顺序出现, 你正好雇佣一次的概率是多少?  
正好雇佣  $n$  次的概率是多少? 正好雇佣两次的概率是多少?

## Problem 4

利用指示器随机变量来解决如下的**帽子核对问题** (hat-check problem):  $n$  位顾客, 他们每个人给餐厅核对帽子的服务生一顶帽子。服务生以随机顺序将帽子还给顾客。请问拿到自己帽子的客户的期望数是多少?

## Problem 5

设  $A[1..n]$  是由  $n$  个不同数构成的数列。如果  $i < j$  且  $A[i] > A[j]$ , 则称  $(i, j)$  对为  $A$  的一个 **逆序对 (inversion)**。(参看作业 1 问题 4 中更多关于逆序对的例子。) 假设  $A$  的元素构成  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  上的一个均匀随机排列。请用指示器随机变量来计算其中逆序对的数目期望。

## Problem 6

熊大教授不同意引理 5.5 证明 (见第 4 讲 PPT 第 19 页) 中使用的循环不变式。他对第 1 次迭代之前循环不变式是否为真提出质疑。他的理由是, 我们可以很容易宣称一个空数组不包含 0 排列。因此, 一个空的子数组包含一个 0 排列的概率是 0, 从而第 1 次迭代之前循环不变式无效。

请重写算法 RANDOMIZE-IN-PLACE, 使得相关循环不变式适用于第 1 次迭代之前的非空子数组, 并为你的算法修改引理 5.5 的证明。

## Problem 7

熊二教授决定写一个过程来随机产生除恒等排列 (identity permutation) 外的任意排列。

他提出了如下算法:

---

**Algorithm 1** Permute Without Identity

---

**Input:** an array  $A$  of length  $n$ **Output:** a uniform random permutation of  $A$ 

```
1: for  $i = 1$  to  $n - 1$  do  
2:   swap  $A[i]$  with  $A[\text{RANDOM}(i + 1, n)]$   
3: end for
```

---

这个算法实现了熊二教授的意图吗?

## Problem 8

熊翠花教授建议用下面的过程来产生一个均匀随机排列:

---

**Algorithm 2** Permute By Cyclic

---

**Input:** an array  $A$  of length  $n$

**Output:** a uniform random permutation of  $A$

1: let  $B[1..n]$  be a new array

2:  $offset = \text{RANDOM}(1, n)$

3: **for**  $i = 1$  **to**  $n$  **do**

4:      $dest = i + offset$

5:     **if**  $dest > n$  **then**

6:          $dest = dest - n$

7:     **end if**

8:      $B[dest] = A[i]$

9: **end for**

10: **return**  $B$

---

请说明每个元素  $A[i]$  出现在  $B$  中任何特定位置的概率是  $1/n$ 。然后通过说明排列结果不是均匀随机排列,表明熊翠花教授错了。

(续页)