

算法导论习题选集

练习 4-2

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：<https://algorithm.cuijiacai.com>

Problem 1

假设我们不是将元素 $A[i]$ 与子数组 $A[i..n]$ 中的一个随机元素交换, 而是将它与数组任何位置上的随机元素交换:

Algorithm 1 Permute With All

Input: an array A of length n

Output: a uniform random permutation of A

```
1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:   swap  $A[i]$  with  $A[\text{RANDOM}(1, n)]$ 
3: end for
```

这段代码会产生一个均匀随机排列吗? 为什么会或为什么不会?

Problem 2

证明: 在过程 PERMUTE-BY-SORTING (见第 4 讲 PPT 第 16 页) 的数组 P 中, 所有元素都唯一的概率至少是 $1 - 1/n$ 。

Problem 3

假设我们希望创建集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的一个 **随机样本**, 即一个具有 m 个元素的集合 S , 其中 $0 \leq m \leq n$, 使得每个 m 集合能够等可能地创建。

一种方法是对 $i = 1, 2, \dots, n$ 设 $A[i] = i$, 调用 $\text{RANDOMIZE-IN-PLACE}(A)$, 然后取最前面的 m 个元素。这种方法会对 RANDOM 过程调用 n 次。

如果 n 比 m 大很多, 我们希望能够创建一个随机样本, 但是对 RANDOM 调用更少的次数。请说明下面的递归过程返回 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的一个随机 m 子集 S , 其中每个 m 子集是等可能的, 然而只对 RANDOM 调用 m 次。

Algorithm 2 Random Sample

Input: an integer m and an integer n , where $0 \leq m \leq n$

Output: a random subset of $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ with size m

```
1: procedure RANDOMSAMPLE( $m, n$ )
2:   if  $m = 0$  then
3:     return  $\emptyset$ 
4:   end if
5:    $S = \text{RANDOMSAMPLE}(m - 1, n - 1)$ 
6:    $i = \text{RANDOM}(1, n)$ 
7:   if  $i \in S$  then
8:      $S = S \cup \{n\}$ 
9:   else
10:     $S = S \cup \{i\}$ 
11:  end if
12:  return  $S$ 
13: end procedure
```

(续页)

Problem 4

假设我们将球投入到 b 个箱子里, 直到某个箱子中有两个球。每一次投掷都是独立的, 并且每个球落入任何箱子的机会均等。请问投球次数期望是多少?

Problem 5

一次聚会需要邀请多少人, 才能期望其中有 3 人的生日相同?

Problem 6

在大小为 n 的集合中, 一个 k 字符串构成一个 k 排列的概率是多少? 这个问题和生日悖论有什么关系?

Problem 7

假设将 n 个球投入 n 个箱子里, 其中每次投球独立, 并且每个球等可能落入任何箱子。空箱子的数目的期望是多少? 正好有一个球的箱子的数目的期望是多少?