

算法导论习题选集

练习 5-1

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：<https://algorithm.cuijiacai.com>

Problem 1

证明: 含 n 个元素的堆的高度为 $\lceil \log n \rceil$ 。

Problem 2

证明: 当用数组表示存储 n 个元素的堆时, 叶结点下标分别是

$$\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \dots, n$$

Problem 3

参考过程 MAX-HEAPIFY (见第 3 讲 PPT 第 13 页), 写出能够维护相应最小堆的

MIN-HEAPIFY(A, i)

的伪代码, 并比较 MIN-HEAPIFY 与 MAX-HEAPIFY 的运行时间。

Problem 4

证明: 对一个大小为 n 的堆, MAX-HEAPIFY 的最坏情况运行时间为 $\Omega(\log n)$ 。(提示: 对于 n 个结点的堆, 可以通过对每个结点设定恰当的值, 使得从根结点到叶结点路径上的每个结点都会递归调用 MAX-HEAPIFY。)

Problem 5

对于 BUILD-MAX 中第 2 行的循环控制变量 i 来说,为什么我们要求它是从 $\lfloor A.length/2 \rfloor$ 到 1 递减,而不是从 1 到 $\lfloor A.length/2 \rfloor$ 递增呢?

Problem 6

证明: 对于任一包含 n 个元素的堆中, 至多有 $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ 个高度为 h 的结点。

Problem 7

试分析在使用下列循环不变式时, HEAPSORT (详见第 5 讲 PPT 第 21 页) 的正确性:

在算法的第 2 到 5 行 **for** 循环每次迭代开始时, 子数组 $A[1..i]$ 是一个包含了数组 $A[1..n]$ 中前 i 小元素的¹最大堆, 而子数组 $A[i + 1..n]$ 包含了数组 $A[1..n]$ 中已排好序的前 $n - i$ 大元素。