

# 算法导论习题选集

## 练习 6

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：<https://algorithm.cuijiacai.com>

## Problem 1

假设快速排序的每一层所做的划分的比例都是  $1 - \alpha : \alpha$ ，其中  $0 < \alpha \leq 1/2$  且是一个常数。试证明：在相应的递归树中，叶结点的最小深度大约是  $-\log n / \log \alpha$ ，最大深度大约是  $-\log n / \log(1 - \alpha)$ （无需考虑舍入问题）。

## Problem 2

试证明: 在一个随机输入的数组上, 对于任何常数  $0 < \alpha \leq 1/2$ , PARTITION 产生比  $1 - \alpha : \alpha$  更平衡的划分的概率约为  $1 - 2\alpha$ 。

### Problem 3

证明: 在递归式

$$T(n) = \max_{0 \leq q \leq n-1} (T(q) + T(n - q - 1)) + \Theta(n)$$

中,  $T(n) = \Theta(n^2)$ 。

## Problem 4

当输入数据已经“几乎有序”时，插入排序速度很快。在实际应用中，我们可以利用这一特点来提高快速排序的速度。当对一个长度小于  $k$  的子数组调用快速排序时，让它不做任何排序就返回。当上层的快速排序调用返回后，对整个数组运行插入排序来完成排序过程。试证明：这一排序算法的期望时间复杂度为  $O(nk + n \log(n/k))$ ；并说明我们应该如何选择  $k$ 。

## Problem 5

考虑对 PARTITION 过程做这样的修改: 从数组  $A$  中随机选出三个元素, 并用这三个元素的中位数 (即这三个元素按大小排在中间的值) 对数组进行划分。求以  $\alpha$  的函数形式表示的、最坏划分比例为  $\alpha : (1 - \alpha)$  的近似概率, 其中  $0 < \alpha < 1$ 。