

# 算法导论习题选集

## 作业 4

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：<https://algorithm.cuijiacai.com>

## Problem 1

(概率计数) 利用一个  $b$  位的计数器, 我们一般只能计数到  $2^b - 1$ 。而用 R.Morris 的 **概率计数法**, 我们可以计数到一个大得多的值, 代价是精度有所损失。

对  $i = 0, 1, \dots, 2^b - 1$ , 令计数器值  $i$  表示  $n_i$  的计数, 其中  $n_i$  构成了一个非负的递增序列。假设计数器初值为 0, 表示计数  $n_0 = 0$ 。INCREMENT 运算单元工作在一个计数器上, 它以概率的方式包含值  $i$ 。如果  $i = 2^b - 1$ , 则该运算单元报告溢出错误; 否则, INCREMENT 运算单元以概率  $1/(n_{i+1} - n_i)$  把计数器增加 1, 以概率  $1 - 1/(n_{i+1} - n_i)$  保持计数器不变。

对所有的  $i \geq 0$ , 若选择  $n_i = i$ , 此计数器就是一个普通的计数器。若选择  $n_i = 2^{i-1}$  ( $i > 0$ ), 或者  $n_i = F_i$  (第  $i$  个佩波那契数, 参见作业 3 问题 2), 则会出现更多有趣的情形。

对于这个问题, 假设  $n_{2^b-1}$  已经足够大, 发生一个溢出错误的概率可以忽略。

1. 请说明在执行  $n$  次 INCREMENT 操作后, 计数器所表示的数期望值正好是  $n$ 。
2. 分析计数器表示的计数的方差依赖于  $n_i$  序列。我们来看一个简单情形: 对所有  $i \geq 0$ ,  $n_i = 100i$ 。在执行了  $n$  次 INCREMENT 操作后, 请估计计数器所表示数的方差。

(续页)

## Problem 2

(查找一个无序数组) 本题将分析三个算法, 他们在一个包含  $n$  个元素的无序数组  $A$  中查找一个值  $x$ 。

考虑如下的随机策略: 随机挑选  $A$  中的一个下标  $i$ 。如果  $A[i] = x$ , 则终止; 否则, 继续挑选  $A$  中一个新的随机下标。重复随机挑选下标, 直到找到一个下标  $j$ , 使  $A[j] = x$  或者直到我们已经检查过  $A$  中的每一个元素。注意, 我们每次都是从全部下标的集合中挑选, 于是可能会不止一次地检查某个元素。

1. 请写出过程 RANDOM-SEARCH 的伪代码来实现上述策略。确保当  $A$  中所有下标都挑选过时, 你的算法应停止。

2. 假定恰好有一个下标  $i$  使得  $A[i] = x$ 。在我们找到  $x$  和 RANDOM-SEARCH 结束之前, 必须挑选  $A$  下标的数目期望是多少?

3. 假设有  $k \geq 1$  个下标  $i$  使得  $A[i] = x$ , 推广你对第 2 问的解答。在找到  $x$  或 RANDOM-SEARCH 结束之前, 必须挑选  $A$  下标的数目期望是多少? 你的答案应该是  $n$  和  $k$  的函数。

4. 假设没有下标  $i$  使得  $A[i] = x$ 。在检查完  $A$  的所有元素或 RANDOM-SEARCH 结束之前, 我们必须挑选的  $A$  的下标的数目期望是多少?

现在考虑一个确定性的线性查找算法, 我们称之为 DETERMINSTIC-SEARCH。具体地说, 这个算法在  $A$  中顺序查找  $x$ , 考虑  $A[1], A[2], A[3], \dots, A[n]$ , 直到找到  $A[i] = x$ , 或者到达数组的末尾。假设输入数组的所有排列都是等可能的。

5. 假设恰好有一个下标  $i$  使得  $A[i] = x$ 。DETERMINSTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是多少? DETERMINSTIC-SEARCH 最坏情况的运行时间又是多少?

6. 假设有  $k \geq 1$  个下标  $i$  使得  $A[i] = x$ , 推广你对第 5 问的解答。DETERMINSTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是多少? DETERMINSTIC-SEARCH 最坏情形的运行时间又

是多少? 你的答案应该是  $n$  与  $k$  的函数。

7. 假设没有下标  $i$  使得  $A[i] = x$ 。DETERMINSTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是多少? DETERMINSTIC-SEARCH 最坏情形的运行时间又是多少?

最后, 考虑一个随机算法 SCRAMBLE-SEARCH, 它先将输入数组随机变换排列, 然后在排列变换后的数组上, 运行上面的确定性线性查找算法。

8. 设  $k$  是满足  $A[i] = x$  的下标的数目, 请给出在  $k = 0$  和  $k = 1$  情况下, 算法 SCRAMBLE-SEARCH 最坏情况的运行时间和运行时间期望。推广你的解答以处理  $k \geq 1$  的情况。

9. 你将会使用 3 种查找算法中的哪一个? 解释你的答案。

(续页)

(续页)