算法导论习题选集

作业 5

节选自《算法导论》教材第三版

课程网站：https://algorithm.cuijiacai.com

Problem 1

（用插入的方法建堆）我们可以通过反复调用 MAX-HEAP-INSERT （详见第 5 讲 PPT 第 43 页）实现向一个堆中插入元素，考虑 BUILD-MAX-HEAP 的如下实现方式：

```
BUILD-MAX-HEAP'(A)
A.heap-size = 1
for i = 2 to A.length
    MAX-HEAP-INSERT(A, A[i])
```

1. 当输入数据相同的时候，BUILD-MAX-HEAP 和 BUILD-MAX-HEAP’ 生成的堆是否总是一样的？如果是，请证明；否则，请举出一个反例。

2. 证明：在最坏情况下，调用 BUILD-MAX-HEAP’ 建立一个包含 n 个元素的堆的时间复杂度是 $\Theta(n \log n)$ 。

Problem 2

（对 d 叉堆的分析） d 叉堆与二叉堆很类似，但其中的每个非叶结点有 d 个孩子，而不是仅仅 2 个。

1. 如何在一个数组中表示一个 d 叉堆?

2. 包含 n 个元素的 d 叉堆的高度是多少？请用 n 和 d 表示。

3. 请给出 EXTRACT-MAX 在 d 叉最大堆上的一个有效实现，并用 d 和 n 表示出它的时间复杂度。

4. 给出 INSERT 在 d 叉最大堆上的一个有效实现，并用 d 和 n 表示出它的时间复杂度。

5. 给出 INCREASE-KEY(A, i, k) 的一个有效实现。当 $k < A[i]$ 时，它会触发一个错误，否则执行 $A[i] = k$ ，并更新相应的 d 叉最大堆。请用 d 和 n 表示出它的时间复杂度。

Problem 2 continued on next page…

(续页)

Problem 3

（Young 氏矩阵）在一个 $m \times n$ 的 **Young 氏矩阵**（Young tableau）中，每一行的数据都是从左到右排序的，每一列的数据都是从上到下排序的。Young 氏矩阵中也会存在一些值为 ∞ 的数据项，表示那些不存在的元素。因此，Young 氏矩阵可以用来存储 $r \le mn$ 个有限的数。

1. 画出一个包含元素为 $\{9, 16, 3, 2, 4, 8, 5, 14, 12\}$ 的 4×4 Young 氏矩阵。

2. 对于一个 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵 Y 来说，请证明：如果 $Y[1,1] = \infty$ ，则 Y 为空；如果 $Y[m,n] < \infty$ ，则 Y 为满（即包含 mn 个元素）。

3. 请给出一个在 $m \times n$ Young 氏矩阵上时间复杂度为 $O(m+n)$ 的 EXTRACT-MIN 的算法实现。你的算法可以考虑使用一个递归过程，它可以把一个规模为 $m \times n$ 的问题分解为规模为 $(m-1) \times n$ 或者 $m \times (n-1)$ 的子问题。这里，定义 $T(p)$ 用来表示 EXTRACT-MIN 在任一 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵上的时间复杂度，其中 $p = m + n$ 。给出求解 $T(p)$ 的递归表达式，其结果为 $O(m+n)$ 。

4. 试说明如何在 $O(m+n)$ 的时间内，将一个新元素插入到一个未满的 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵中。

5. 在不用其他排序算法的情况下，试说明如何利用一个 $n \times n$ 的 Young 氏矩阵在 $O(n^3)$ 时间内将 n^2 个数进行排序。

6. 设计一个时间复杂度为 $O(m+n)$ 的算法，它可以用来判断一个给定的数是否存储在 $m \times n$ 的 Young 氏矩阵中。

Problem 3 continued on next page…

(续页)

Problem 3 continued on next page…

(续页)