

第一部分：基础知识

INTRODUCTION TO

ALGORITHMS

THIRD EDITION

# 函数的增长

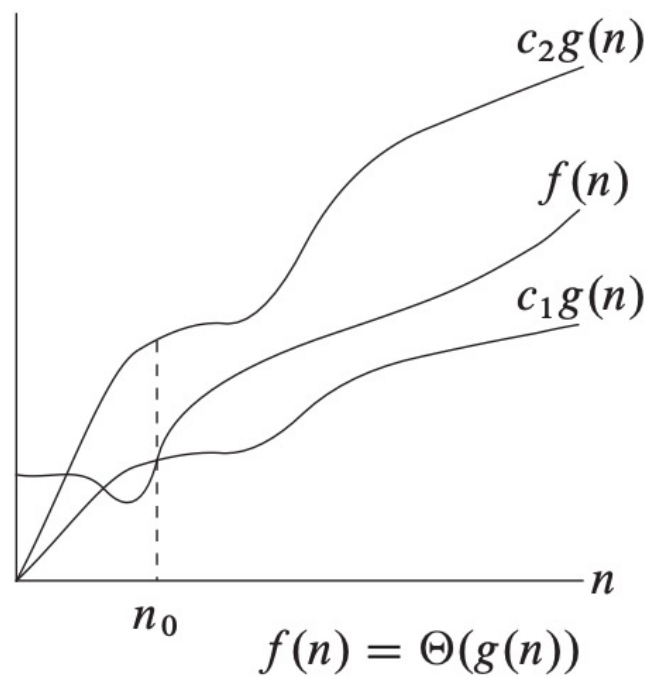
《算法导论》—— 第2讲

*jiacaicui@163.com*

# 内容提要

- 学习算法的渐近 (asymptotic) 效率
  - 描述函数的增长
  - 忽略低阶项和系数以抓住重点
- 学习一些比较函数增长的记号
  - $O \approx \leq$
  - $\Omega \approx \geq$
  - $\Theta \approx =$
  - $o \approx <$
  - $\omega \approx >$

# 渐近记号



# 渐近紧确界 (asymptotically tight bound)

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

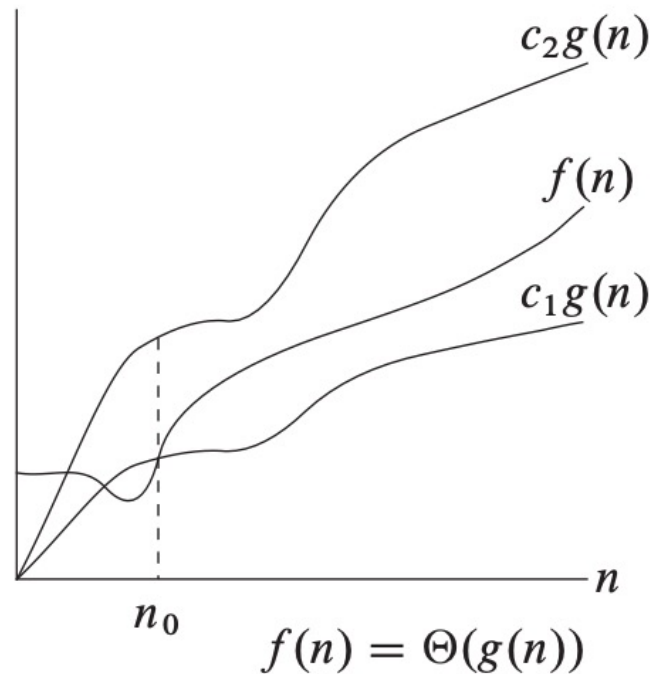
- 我们常将  $f(n) \in \Theta(g(n))$  简写作  $f(n) = \Theta(g(n))$ 。
- 后续的所有渐进记号都遵守这个约定。

• 求证： $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

证明： $\Leftrightarrow c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, n \geq n_0$

$$\Leftrightarrow c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2, n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \text{取 } c_1 = \frac{1}{14}, c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 7 \text{ 即可。}$$



# 渐近上界 / 渐近下界

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 > 0, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$

- 当描述一个算法的运行时间为  $O(g(n))$  时，通常指的是其在**最坏情况**下的运行时间的**最紧上界**。

- 不同情况下运行时间不同
- 上界有很多，最紧的上界才是最公允、精确的

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 > 0, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$

- 定理3.1：

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$$

- 渐近紧确界 = 渐近上界 + 渐近下界

# 非渐近紧确界

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < cg(n)\}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0 > 0, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) < f(n)\}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

- $n^{1.99999} = o(n^2), n^2 \neq o(n^2), n^2 = O(n^2)$
- $n^{2.00001} = \omega(n^2), n^2 \neq \omega(n^2), n^2 = \Omega(n^2)$

# 渐近记号的性质

- **传递性** :  $f(n) = \Theta(g(n)) \wedge g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$ 
  - 对于  $O, \Omega, o, \omega$  记号也成立。
- **自反性** :  $f(n) = \Theta(f(n))$ 
  - 对于  $O, \Omega$  记号也成立。
- **对称性** :  $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$
- **转置对称性** :  $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$ 
  - 对于  $o$  和  $\omega$  也是如此。
- **三分性** :  $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b \vee a = b \vee a > b$ 
  - 实数两两可比，但是函数不行。例如 :  $n$  和  $n^{1+\sin(n)}$



# 标准记号 与常用函数

必要的数学复习

$$\iiint_M z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 n \, r \, dr \right) d\theta \right) d\varphi \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2; \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \vec{n} = (F_x', F_y', F_z')$$

$$\frac{2x}{x^2+2y^2} = 2 \quad \text{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad A = [1, 0, 3] \quad z = \frac{1}{x} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_2 = 2xy^2 - 1 = 1 \quad x = \text{tg} t \quad x_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \beta \end{pmatrix} \quad e^2 - xyz = e \cdot A[0, e, 1]$$

$$C = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \quad y = \sqrt{x+1} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \frac{\sin x}{x} \leq \frac{x}{x} = 1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

$$x^2 + x^2 + y^2 + z^2 + xyz - C = 0 \quad \eta_1 = \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1 \neq 0 \quad \cos^2 \beta = 1 \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda x - y + z = 1 \quad \lambda_2 = i\sqrt{14} \quad Y_{in} = Y_1 + b \cdot k_2 \quad |x| + |y| \neq 0; \mu \neq 0 \quad A+B+C=8$$

$$x + y + z = \lambda \quad 2 \arctg x - x = 0, I = (1, 10) \quad \cos p = (1, 0) \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{4\sqrt{3}} \right) \quad 3A^2 - 7B + 2C = -10, 3$$

$$x + y + z = 7^2 \quad \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}} \quad 18A + 6B - 3C = 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 16 - x^2 + 16y^2 - 4z^2 > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{2\sqrt{3n^2+2n-1}} \quad \int 3x^7 + 166x^{-0.12} dx \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2p \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -11p, x_2 = -p, x_3 = 7p, p \in \mathbb{R} \quad \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx \quad y' - \frac{\sqrt{y}}{x+2} = 0; y(0) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} x, 1+x^2, 1 \\ y, 1+y^2, 1 \\ z, 1+z^2, 1 \end{pmatrix}, x=0, y=1, z=2$$

$$f(x) = 2 \frac{x}{x+1}, \varepsilon = 0.005 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \quad x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^n (p_2(x_i) - y_i)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5}$$

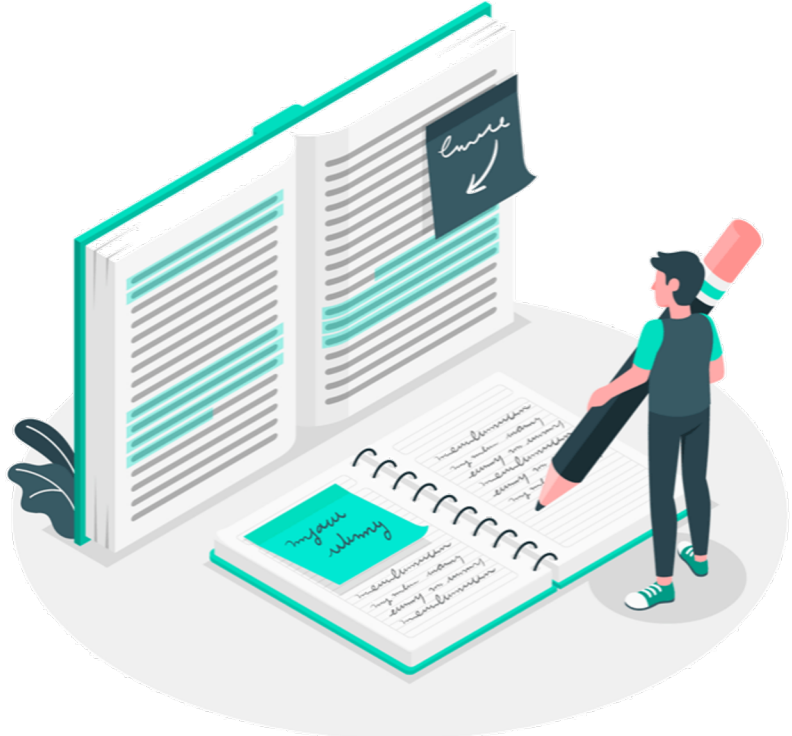
# 复习一些数学

- 单调性
- 向下取整与向上取整
- 模运算
- 多项式
- 指数
- 对数
- 阶乘
- 多重函数
- 多重对数函数
- 斐波那契数

$$\text{斯特林公式：} n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

自行复习：中文版教材30-34页，英文版教材53-60页

# 本讲小结



# 内容提要

- 学习算法的渐近 (asymptotic) 效率
  - 描述函数的增长
  - 忽略低阶项和系数以抓住重点
- 学习一些比较函数增长的记号
  - $O \approx \leq$
  - $\Omega \approx \geq$
  - $\Theta \approx =$
  - $o \approx <$
  - $\omega \approx >$

The End!

